

Алгоритмы интегрирования/суммирования по частям

При работе с функционалами и законами сохранения возникают следующие задачи.

Непрерывный случай: выяснить, является ли заданная функция полной производной,

$$f(x, u_0, \dots, u_k) \stackrel{?}{=} D_x(g(x, u_0, \dots, u_{k-1})) = \partial_x(g) + \partial_0(g)u_1 + \dots + \partial_{k-1}(g)u_k. \quad (1)$$

Дискретный случай: выяснить, является ли заданная функция полной разностью,

$$f(v_n, \dots, v_{n+k}) \stackrel{?}{=} (T - 1)(g(v_n, \dots, v_{n+k-1})) = g(v_{n+1}, \dots, v_{n+k}) - g(v_n, \dots, v_{n+k-1}). \quad (2)$$

Мы рассмотрим обе задачи параллельно, обозначая переменные разными буквами, чтобы не было путаницы. Для букв u_n индекс $n \in \mathbb{N}_0$ обозначает порядок производной, а для букв v_n это просто порядковый номер, $n \in \mathbb{Z}$. Все функции предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

Сразу отметим небольшое отличие: в (1) допускается зависимость от x , а в (2) зависимости от n нет. Как мы увидим, это приводит и к небольшому отличию в ответах. Запрет n объясняется тем, что иначе приходится работать с последовательностью $f_n[v]$, в которой все функции, вообще говоря, никак друг с другом не связаны, что очень сложно. На практике явная зависимость от n редко бывает нужна (хотя и существуют важные примеры, где её все же необходимо включать).

- Прямо из (1) легко увидеть необходимые условия, которым должна удовлетворять f , чтобы быть полной производной. Если $k > 0$, то правая часть линейна по u_k , а если $k = 0$, то правая часть вообще не зависит от $u_k = u_0$; то есть, должно быть

$$\partial_k^2(f) = 0 \quad \text{при } k > 0, \quad \partial_0(f) = 0 \quad \text{при } k = 0.$$

Это и приводит к алгоритму *интегрирования по частям*. Если u_k входит в f нелинейно, то есть $\partial_k^2(f) \neq 0$, то $f \notin \text{Im } D_x$ и вычисление заканчивается. В противном случае имеем $f = pu_k + q$, где функции $p = \partial_k(f)$ и q не зависят от u_k . Тогда

$$f = D_x(P) + \tilde{f}, \quad P := \int p du_{k-1}, \quad \tilde{f} = \tilde{f}(x, u_0, \dots, u_{k-1}).$$

Повторяем то же самое рассуждение к остатку $\tilde{f}$ и так далее. Если мы так и не наткнёмся на препятствие в виде нелинейности по старшей переменной, то через конечное число шагов переменные u_n с $n > 0$ закончатся. Если остаток зависит от u_0 , то $f \notin \text{Im } D_x$; если же остаток зависит только от x , то надо проинтегрировать его и занести под D_x , функция g тем самым будет найдена.

• В случае (2) все даже проще. Если $k > 0$, то в правой части переменные v_n и v_{n+k} разделены (каждая из них не входит в одно из слагаемых), а если $k = 0$, то правая часть вообще равна 0; то есть, должно быть

$$\partial_n \partial_{n+k}(f) = 0 \quad \text{при } k > 0, \quad f = 0 \quad \text{при } k = 0.$$

Это приводит к алгоритму *суммирования по частям*. Если $\partial_n \partial_{n+k}(f) \neq 0$, то $f \notin \text{Im}(T - 1)$ и вычисление окончено. В противном случае f представляется в виде $f = T(p) + q$, где функции p и q зависят от $u_n, \dots, u_{n+k-1}$. Тогда

$$f = (T - 1)(p) + \tilde{f}, \quad \tilde{f} = p + q = \tilde{f}(x, u_n, \dots, u_{n+k-1}).$$

Повторяем то же самое рассуждение к остатку $\tilde{f}$ и так далее. Если мы так и не наткнёмся на препятствие в виде выражения, в котором крайние переменные неразделены, то через конечное число шагов переменные u_{n+j} с $j > 0$ закончатся. Если остаток не равен 0, то $f \notin \text{Im}(T - 1)$, если равен, то функция g уже найдена.

Пример 1. Поиск закона сохранения для КдФ методом неопределенных коэффициентов

Задача. Найти закон сохранения для уравнения $u_t = u_3 + buu_1$ с плотностью вида

$$\rho = au_2^2 + buu_1^2 + cu^4,$$

где a, b, c неизвестные числа.

Пояснение. Уравнение однородно относительно весов $w(u) = 2$, $w(\partial_x) = 1$, $w(\partial_t) = 3$, откуда следует, что $w(u_n) = n + 2$. Мономов фиксированного веса конечное число; в частности, для веса 8 имеем

$$u_6, \quad uu_4, \quad u_1u_3, \quad u_2^2, \quad u^2u_2, \quad uu_1^2, \quad u^4.$$

Отсюда выкидываются мономы, линейные по старшей переменной, так как они эквивалентны, по модулю $\text{Im } D_x$, другим мономам из списка. В результате, остаётся 3 монома, линейная комбинация которых и записана. Нужно лишь уточнить коэффициенты. Именно так искались законы сохранения, пока не догадались обращать преобразование Миуры. Если взять мономы веса 20, то их будет уже 32 штуки, после отсеивания лишних. Если позволит время, мы позже реализуем этот подход на компьютере, так как с его помощью можно отыскивать новые интегрируемые уравнения. А пока посчитаем вручную.

Дифференцируем ρ в силу уравнения и постепенно заносим мономы под D_x , пока не наталкиваемся на препятствие. При этом, удобно сгруппировать члены по степеням; ясно, что интегрирование по частям идет для каждой такой группы независимо.

Имеем:

$$\begin{aligned}
D_t(\rho) &= D_t(au_2^2 + buu_1^2 + cu^4) \\
&= 4cu^3(u_3 + 6uu_1) + bu_1^2(u_3 + 6uu_1) + 2buu_1(u_4 + 6uu_2 + 6u_1^2) \\
&\quad + 2au_2(u_5 + 6uu_3 + 18u_1u_2) \\
&= 2au_2u_5 + [2buu_1u_4 + 12auu_2u_3 + bu_1^2u_3 + 36au_1u_2^2] \\
&\quad + [4cu^3u_3 + 12bu^2u_1u_2 + 18buu_1^3] + 24cu^4u_1 \\
&= D_x\left(2au_2u_4 + 2buu_1u_3 + 4cu^3u_2 + \frac{24}{5}cu^5\right) \\
&\quad - 2au_3u_4 + [12auu_2u_3 + bu_1^2u_3 + 36au_1u_2^2 - 2buu_2u_3 - 2bu_1^2u_3] \\
&\quad + [12bu^2u_1u_2 + 18buu_1^3 - 12cu^2u_1u_2] \\
&= D_x\left(2au_2u_4 - au_3^2 + 2buu_1u_3 + 4cu^3u_2 + \frac{24}{5}cu^5\right) \\
&\quad + [(12a - 2b)uu_2u_3 - bu_1^2u_3 + 36au_1u_2^2] + [12(b - c)u^2u_1u_2 + 18buu_1^3] \\
&= D_x\left(2au_2u_4 - au_3^2 + 2buu_1u_3 + 4cu^3u_2 + \frac{24}{5}cu^5\right. \\
&\quad \left.+ (6a - b)uu_2^2 - bu_1^2u_2 + 6(b - c)u^2u_1^2\right) \\
&\quad + [36au_1u_2^2 - (6a - b)u_1u_2^2 + 2bu_1u_2^2] + [18buu_1^3 - 12(b - c)uu_1^3].
\end{aligned}$$

Чтобы последняя строчка интегрировалась, коэффициенты должны равняться 0:

$$30a + 3b = 0, \quad 6b + 12c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -10a, \quad c = 5a.$$

Полагая $a = 1$, $b = -10$, $c = 5$, получаем закон сохранения:

$$D_t(u_2^2 - 10uu_1^2 + 5u^4) = D_x(2u_2u_4 - u_3^2 - 20uu_1u_3 + 16uu_2^2 + 20u^3u_2 + 10u_1^2u_2 - 90u^2u_1^2 + 24u^5).$$

Пример 2. Закон сохранения для цепочки Вольтерра

Задача. Найти закон сохранения для цепочки $v_{n,t} = v_n(v_{n+1} - v_{n-1})$ с плотностью вида

$$\rho = av_n^2 + bv_nv_{n+1}.$$

Имеем, опуская n в индексах:

$$\begin{aligned} D_t(\rho) &= D_t(av^2 + bvv_1) \\ &= 2av^2(v_1 - v_{-1}) + bvv_1(v_1 - v_{-1}) + bvv_1(v_2 - v) \\ &= (2a - b)v^2v_1 - 2av_{-1}v^2 + bvv_1^2 - bv_{-1}vv_1 + bvv_1v_2 \\ &= (T - 1)(bv_{-1}vv_1 - 2av_{-1}v^2) + (2a - b)v^2v_1 + (b - 2a)vv_1^2. \end{aligned}$$

В членах v^2v_1 и vv_1^2 , не вошедших под знак $T - 1$, переменные v и v_1 не разделяются, значит коэффициенты должны быть равны 0, то есть, $b = 2a$. Получаем закон сохранения

$$D_t(v^2 + 2vv_1) = (T - 1)(2v_{-1}v(v_1 - v)).$$

Нужно подчеркнуть, что хэпиэнд и в этом, и в предыдущем примере — некоторое чудо, обусловленное именно интегрируемостью уравнений. Если взять какие-то более общие уравнения, то нужно быть готовым к тому, что система на коэффициенты окажется противоречивой и никакого закона сохранения не найдётся.

Вариационная производная

Вариационной производной, или оператором Эйлера, называется, в непрерывном случае, оператор

$$\frac{\delta}{\delta u} = \mathbf{E} = \partial_0 - D_x \partial_1 + D_x^2 \partial_2 - \cdots + (-1)^j D_x^j \partial_j + \cdots,$$

а в дискретном случае оператор

$$\frac{\delta}{\delta v} = \mathbf{E} = \cdots + T^k \partial_{-k} + \cdots + T \partial_{-1} + \partial_0 + T^{-1} \partial_1 + \cdots + T^{-k} \partial_k + \cdots.$$

В обоих случаях бесконечная сумма корректно действует на функции, зависящие от конечного числа динамических переменных.

Эти операторы возникают при вычислении вариации функционалов вида $\int_{\mathbb{R}} f[u] dx$ или $\sum_{\mathbb{Z}} T^n(f)$. Пусть f_* обозначает оператор линеаризации, или производную Фреше

$$f_*(g) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} f[u + \varepsilon g] \right|_{\varepsilon=0}.$$

В непрерывном и дискретном случаях имеем, соответственно,

$$f_* = \sum \partial_n(f) D_x^n \quad \text{и} \quad f_* = \sum \partial_n(f) T^n,$$

где суммирование распространяется по всем динамическим переменным входящим в f . Перекидывая в выражении $f_*(\delta u)$ производные/сдвиги так, чтобы сохранять эквивалентность по модулю $\text{Im } D_x$ или $\text{Im}(T - 1)$, а именно, по правилам

$$a D_x(b) \sim -D_x(a)b, \quad a T(b) \sim T^{-1}(a)b,$$

можно прийти к выражениям, в которых δu входит простым множителем, тогда второй сомножитель и будет вариационной производной:

$$f_*(\delta u) \sim \frac{\delta f}{\delta u} \cdot \delta u.$$

Нетрудно проверить, что в обоих случаях удобной для запоминания формой записи является

$$E(f) = f_*^\top(1), \quad (3)$$

где транспонирование определяется правилами

$$(AB)^\top = B^\top A^\top, \quad f^\top = f, \quad D^\top = -D, \quad T^\top = T^{-1}.$$

Основное свойство сформулировано в следующем утверждении.

Теорема. *Непрерывный случай.* Для функции f существует функция g такая, что $f = D_x(g)$, если и только если $E(f) = 0$:

$$\text{Im } D_x = \ker E.$$

Разностный случай. Для функции f существует функция g такая, что $f = (T - 1)(g) + \text{const}$, если и только если $E(f) = 0$:

$$\text{Im}(T - 1) \oplus \mathbb{C} = \ker E.$$

Доказательство. Легко доказываются тождества

$$(D_x(g))_* = D_x g_*, \quad (T(g))_* = T g_*,$$

и тогда из (3) сразу следует, что $E(D_x(g)) = 0$ и $E((T - 1)(g)) = 0$. Чтобы доказать в обратную сторону, заметим, в непрерывном случае, что если $f = f(x, u_0, \dots, u_k)$ с $k > 0$,

то из равенства $E(f) = 0$ следует, что f линейна по u_k . Но тогда мы можем понизить порядок, как объяснено в алгоритме интегрирования по частям, и для остатка также будет выполняться равенство $E(\tilde{f}) = 0$. Повторяя этот процесс, придем к эквивалентной функции $\tilde{f}(x, u_0)$, для которой $E(\tilde{f}) = \partial_0(\tilde{f}) = 0$, то есть, $\tilde{f} = \tilde{f}(x) \in \text{Im } D_x$.

Рассуждение в разностном случае полностью аналогично. Отметим только, что необходимость добавлять константу в этом случае — плата за отказ от явной зависимости от n .